数理解析研究所講究録
1097巻 1999年 100-107

局所 Weil 群の作用とそのトレースについて

東京大学数理科学研究科　落合 理 (Ochiai, Tadashi)

本稿では講演の際に述べさせて頂いた Serre-Tate 及び Fontaine の予想に関する結果を記すとともに講演の際にはあまり立ち入って触れることのできなかった p-進の場合の結果や証明の方法についてより詳しくかつ正確な記述を与えたい.

まず notation 等の復習から始めよう.

K を局所体とし, 有限体 $k=\mathbb{F}_{p^h}$ を K の剰余体とする. $P_0=\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}$ とおく. $\overline{K}$ を K の分離閉包, $G_K:=\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ を K の絶対 Galois 群とし, G_K の惰性部分群を I_K とする. また, W_K を K の Weil 群とする.

W_K は G_K の部分群で次の完全列で定まるものである.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & I_K & \longrightarrow & W_K & \xrightarrow{u} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \cap & & \cap & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & I_K & \longrightarrow & G_K & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^h}/\mathbb{F}_p) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

但し, $\sigma\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)\cong\widehat{\mathbb{Z}}$ を geometric Frobenius ($x\mapsto x^{1/p}$) とするとき, u は $g\mapsto\sigma^{u(g)}$ で定義される写像である.

W_K の部分集合 W_K^+ を

$$W_K^+:=\{g\in W_K|\ u(g)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

と定める.

X を K 上の n-次元完備非特異代数多様体とし, i を $0\leq i\leq 2n$ なる自然数とする. また l' を素数とする.

今, X に付随する W_K の表現 $V_{l'}^i(X/K)$ を次のようにして構成する。

1. $l'\neq p$ のとき,

   G_K 及び W_K は l'-進エタールコホモロジー群

   $$H^i(X\underset{K}{\otimes}\overline{K},\mathbb{Q}_{l'}):=\varprojlim_n H^i(X\underset{K}{\otimes}\overline{K},\mathbb{Z}/l'^n\mathbb{Z})\underset{\mathbb{Z}_l}{\otimes}\mathbb{Q}_{l'}$$

   に作用する. よって $V_{l'}^i(X/K):=H^i(X\underset{K}{\otimes}\overline{K},\mathbb{Q}_{l'})$ と定義する. $V_{l'}^i(X/K)$ は W_K の $\mathbb{Q}_{l'}$-linear な作用をもつ有限次元 $\mathbb{Q}_{l'}$-ベクトル空間である.

2. $l' = p$ のとき,

まず 上のような $H^i(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_p)$ は あまり よい 表現ではない. よって 我々は p-進ホッヂ理論を 使うことによりもとめる $V_p^i(X/K)$ を構成する. まず, B_{st}を Fontaine によって定義された p-進周期の環 ([Fo1] 参照) とするとき, K上の 完備非特異多様体 Xに対して, $\widehat{D}_{\mathrm{pst}}(H^i(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_p))$ を

$$\widehat{D}_{\mathrm{pst}}(H^i(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_p)) := \varinjlim_{F \in \mathcal{F}} (B_{\mathrm{st}} \otimes H^i(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_p))^F$$

と定義する. ここで, $\mathcal{F}$は惰性群 I_K の開部分群全体からなる集合とする. この $\widehat{D}_{\mathrm{pst}}(H^i(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_p))$ は $P_0 = \widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}$ 上の有限次元ベクトル空間である. このとき, $D = \widehat{D}_{\mathrm{pst}}(H^i(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_p))$ は σ-linear な G_K の作用と, σ-linear operator $\varphi : D \longrightarrow D$ をもつ. Fontaine [Fo2] は W_Kの Dへの P_0-linear な表現を

$$W_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_{P_0}(D) \ (g \longmapsto \varphi^{-u(g)} \circ g)$$

と定義した（ここで, u は先の Weil 群の定義であらわれた写像 $W_K \longrightarrow \mathbb{Z}$ である）. $V_p^i(X/K)$ は 上のようにして Dに フロベニウスφ で twist して W_Kの作用を与えた表現として 定義される. $V_p^i(X/K)$ は W_Kの P_0-linear な作用を備えた有限次元 P_0-ベクトル空間である.

このとき, 例えば次の様なことが期待される.

予想 (Serre-Tate, Fontaine). 上の様な Xと $g \in W_K^+$に対して gの作用のトレース $\mathrm{Tr}(g^*; V_{l'}^i(X/K))$ は l'の選び方によらない有理整数になる.

注意 . 1. $i = 0$ (resp. $i = 2n$) とする. このとき, $V_{l'}^i(X/K)$ は $l' \neq p$ ならば Tate twist $\mathbb{Q}_{l'}$ (resp. $\mathbb{Q}_{l'}(-n)$) と同型であり, $l' = p$ のときは P_0 (resp. $P_0(-n)$) と同型である. よって $i = 0, 2n$ では予想は直ちにしたがう.

2. $i = 1$ (resp. 2n − 1) とすると コホモロジー $V_{l'}^i(X/K)$ は Xの ピカール多様体 (resp. アルバネーゼ多様体) とよばれる アーベル多様体 A_X^iが存在して W_Kの表現として $V_{l'}^i(X/K) \cong V_{l'}^1(A_X^i/K)$ となる. このとき Grothendieck による アーベル多様体の半安定還元定理 (SGA7-I) によって $i = 1, 2n-1$ ならば 上の予想は正しい.

3. X が アーベル多様体 とするとき コホモロジー $V_{l'}^i(X/K)$ は $V_{l'}^1(X/K)$ の i 階外巾 $\wedge^i V_{l'}^1(X/K)$ と同型なことが知られている. よって X が アーベル多様体 のときは 任意の i で予想は正しいことがわかる.
4. X が さらに good reduction をもつとする. $l' \neq p$ のときは Deligne によって証明された Weil 予想 [De] によって W_K^+ の $V_{l'}^i(X/K)$ への作用のトレースは l' の選び方によらない有理整数となる. また $l' = p$ のときは [KM] により トレースは ある $l' \neq p$ での W_K^+ の $V_{l'}^i(X/K)$ への作用のトレースと一致する. よって, この場合は任意の i で予想 は正しい（正確には [KM] は射影空間内での 超平面切断の議論を用いるため 一般の完備非特異多様体 全てを 扱ってはいない. 射影的 ではない 完備非特異多様体 に対しては [C] Theorem 2.2 を用いればよい）.

主結果とその証明について述べる前に 少し 関連する 話題の一つとして Hasse-Weil L-函数の 定義について 説明する. 数論及び数論的幾何学の最も大事なテーマとして 代数体上定義された多様体の arithmetic(有理点の様子やガロア表現など) を 調べることがある. Xを 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義された完備非特異代数多様体とする. Xに対する Hasse-Weil L-函数は次のように定義される.

$$L(X,i,s) := \prod_{p:\text{素数}} (1 - \mathrm{Frob}_p \cdot p^{-s} \mid (V_{l'}^i(X/\mathbb{Q}_p))^{I_p})^{-1}.$$

$L(X,i,s)$ は $\mathrm{Re(s)} > \frac{i}{2}+1$ で絶対収束し, 全複素平面へ正則に解析接続されると予想されている. 前述の注意の 4 を用いることにより Xが 素数 p で good reduction をもつならば p での Euler 因子 $(1 - \mathrm{Frob}_p \cdot p^{-s} \mid (V_{l'}^i(X/\mathbb{Q}_p))^{I_p})^{-1}$ は l'の選び方によらずに定まることが容易に確かめられる. ところが, p を Xが p で bad reduction をもつような 有限個の素数のうちの一つとすると p での Euler 因子は一般には l'の選び方によらずに定まるかどうかは わかっていない. ただ前述の Serre-Tate, Fontaine による予想を仮定すると bad reduction をもつ場合にも p での Euler 因子が l'の選び方によらないことが 容易に確かめられる. このような 事実からも 先程の 予想の大切さは 感じとって頂けることと思う.

さて, 今回の主結果は以下の様なものである.

定理 A． X を K上の完備非特異代数多様体 とし, g を W_K^+ の元とする.
このとき, 交代和 $\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(g^*; V_{l'}^i(X/K))$ は l'の選び方によらない有理整数になる.

この定理からただちに次のことが導かれる.

系 B． 次のいずれかの場合には, すべての i で予想 は正しい.

1. Xは K上の完備非特異代数曲面（つまり, $\dim X = 2$）
2. Xは射影空間 $\mathbb{P}_K^n$の中の非特異完全交叉多様体

定理 A からただちに得られる系として, Swan 導手の l'-independence がある. Swan 導手の定義と結果の正確な記述は以下のとおりである. $l' \neq p$ のとき, Grothendieck のモノドロミー定理（SGA7 exp.1）によって I_Kの $V_{l'}^i(X/K)$ への作用はある開部分群 $J \subset I_K$上では unipotent な作用を持つ. また, $l' = p$ のときにも de Jong の結果より $H^i(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_p)$ は potentially semi-staable であるから, I_Kの $V_p^i(X/K)$ への作用はある開部分群 $J \subset I_K$上で unipotent な作用を持つ（例えば, [Be] p307 参照）. $b_{I_K/J}$ を I_K/Jの Swan 指標, φ_i を I_K/J の $V_{l'}^i(X/K)$ への指標とする. これを用いて, $V_{l'}^i(X/K)$ の Swan 導手 $\mathrm{Sw}(X, K, i, l')$ を

$$\mathrm{Sw}(X, K, i, l') := \frac{1}{\sharp I_K/J} \sum_{g \in I_K/J} \left(b_{I_K/J}(g^{-1}) \cdot \varphi_i(g) \right)$$

と定義する. これは $V_{l'}^i(X/K)$ への惰性群 I_Kの作用がどれくらい wild であるかをはかる不変量である. 次も定理 A 及び系 B からただちに得られる結果である.

系 C． このとき $\sum_{0 \leq i \leq 2n} (-1)^i \mathrm{Sw}(X, K, i, l')$ は l'の選び方によらない. 特に Xが系 B で述べられた様なものであれば任意の i に対して $\mathrm{Sw}(X, K, i, l')$ は l'の選び方によらない.

系 B より, 先に述べた Hasse-Weil L-函数 の定義については 次の事がわかる.

系 D． Xを 非特異完備代数曲面 または 非特異完備完全交差多様体 とするとき Hasse-Weil L-函数 $L(X, i, s)$ は 任意の $0 \leq i \leq 2\dim X$ で l' の選び方によらない well-defined な函数となる.

以下, 主に $l' \neq p$ の場合で 定理 A の 証明の概略を 述べる. 実際 我々が示すのは 定理 A より もう少し一般的な 次の形の 定理である.

定理 A′. X を K上の（必ずしも完備非特異とは限らない）代数多様体 とし, g を W_K^+ の元とする. このとき, 交代和 $\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(g^*; H_c^i(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_{l'}))$ は l'の選び方によらない有理整数になる（但し, ここで $H_c^i(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_{l'}))$ は compact support エタールコホモロジー とする）.

X が 完備な多様体 ならば コンパクト な台をもつ エタールコホモロジー $H_c^i(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_{l'}))$ と 通常のエタール コホモロジー $H^i(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_{l'}))$ は 一致する. よって 定理 A′ から 定理 A は 直ちに得られる. 定理 A′ の 証明は semi-stable reduction をもつ場合にまず 示し, 一般の場合は de Jong の理論を用いて semi-stable reduction の場合に帰着する. 簡単のため 局所体 K の標数は 0 であると仮定しておく.

1. まず, X'が ある局所体 K'上の strict semi-stable reduction を もつ多様体の場合を考える. つまり X'は 整数環 $\mathcal{O}_{K'}$ 上の 正則 かつ 固有平坦な モデル $\mathcal{X}_{/\mathcal{O}_{K'}}$ をもち, special fiber $Y' = \mathcal{X}'_{/\mathcal{O}_{K'}} \underset{\mathcal{O}_{K'}}{\otimes} k'$は $\mathcal{X}'_{/\mathcal{O}_{K'}}$ の中の strict normal crossing divisor であるとする. このとき, Rapoport-Zink によって構成された weight スペクトル系列 [R-Z]
$$_W E_1^{a,b} = H^{a+b}(\overline{Y}', \mathrm{gr}_{-a}^W R\Psi(\mathbb{Q}_{l'})) \Rightarrow E^{a+b} = H^{a+b}(X' \underset{K'}{\otimes} \overline{K}', \mathbb{Q}_{l'})$$
がある. このスペクトル系列は $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K')$ の作用と両立する. $Y' = \bigcup_{1 \le i \le r} Y_i'$ (Y_i' は smooth divisor) とかけるから,
$$Y'^{(m)} = \coprod_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le r} (\bigcap_{i_j} Y_{i_j}'),$$
とおく. $Y'^{(m)}$ は K' の剰余体 k' 上の $d+1-m$ 次元の完備非特異多様体である. このとき 上のスペクトル系列の E_1-term は
$$_W E_1^{-r,n+r} = \bigoplus_{q, r+q \ge 0} H^{n-r-2q}(\overline{Y}'^{(r+1+2q)}, \mathbb{Q}_{l'})(-r-q).$$
とかけることが知られている. $\overline{Y}'^{(m)}$ 上の 絶対的フロベニウス自己準同型を f_{ab} とするとき, f_{ab} は $H^i(\overline{Y}'^{(m)}, \mathbb{Q}_{l'})$ 上に自明な作用を引き起こす. よって

$g' \in W_{K'}^{+}$ の E_1-term への作用は $g' \circ f_{\mathrm{ab}}{}^{u(g')}$ の作用と同じである. $g' \circ f_{\mathrm{ab}}^{u(g')}$ は $\overline{Y'}^{(m)}$ の定義体 $\overline{k}'$ 上で定義された幾何的な 自己準同型であるから エタール コホモロジー に対する Lefschetz の 跡公式:

$$(\Gamma_{f_{\mathrm{ab}}^{u(g')}\circ g'} \cdot \Delta_{Y'^{(m)}}) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(g'^*; H^i(\overline{Y}'^{(m)}, \mathbb{Q}_{l'})),$$

が成り立つ. ここで $\Delta_{Y'^{(m)}}$ は$\overline{Y}'^{(m)} \times \overline{Y}'^{(m)}$ の中の対角的サイクルであり, $\Gamma_{f_{\mathrm{ab}}^{u(g')}\circ g'}$ は 幾何的自己準同型 $f_{\mathrm{ab}}^{u(g')} \circ g'$ のグラフである. 一方で スペクトル系列に関する 一般論より,

$$\begin{aligned}
\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(g'^*; H_c^i(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_{l'})) &= \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(g'^*; E^i) \\
&= \sum_{a,b} (-1)^{a+b} \mathrm{Tr}(g'^*; E_1^{a,b}) \\
&= \sum_n \Big(\sum_{s\geq 0, t\geq 0} (-1)^n \mathrm{Tr}(g'^*; H^{n-s-t}(\overline{Y}'^{(1+s+t)}, \mathbb{Q}_{l'})(-t)) \Big) \\
&= \sum_{u\geq 0} \Big(\sum_{0\leq t\leq u} \Big(\sum_n (-1)^n \mathrm{Tr}(g'^*; H^{n-u}(\overline{Y}'^{(1+u)}, \mathbb{Q}_{l'})(-t)) \Big) \Big).
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって 先の Lefschetz の 跡公式 よりトレースの交代和

$$\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(g'^*; H_c^i(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_{l'}))$$

は 素数 の 選び方によらないことがわかる.

2. 次に, Xが semi-stable reduction をもつとは限らない一般の多様体の場合を考えよう. まず X が 完備 としてよいことが簡単な議論でわかる. このときは, Xが semi-stable reduction をもつ多様体で dominate できるという de Jong の結果 ([dJ1], [dJ2]) を用いて先の場合に帰着するという アイディアで X の次元に関する帰納法によって 証明をすすめていく. もう少し 詳しくいうと de Jong の結果 ([dJ1], [dJ2]) を 組み合わせて 次のことがわかる.

命題 . $\mathcal{X}$を Xの $\mathcal{O}_K$上の固有平坦な モデルとする. このとき, Kの有限次拡大 K', 有限群 G, $\mathcal{O}_{K'}$ 上の有限群 G の作用をもつ strict semi-stable variety $\mathcal{X}'_{/\mathcal{O}_{K'}}$ と 有限群 G の作用と両立する generically finite な射 $\mathcal{X}'_{/\mathcal{O}_{K'}} \longrightarrow \mathcal{X}_{/\mathcal{O}_K}$ で K 上の 双有理的写像 $(X'/G)_{/K} \longrightarrow X_K$ を引き起こすものがある. 但し, $X'_{/K'}$ は $\mathcal{X}'_{/\mathcal{O}_{K'}}$ の generic fiber とする. (ここで G は $\mathcal{X}_{/\mathcal{O}_K}$ 上には自明に作用することまた G の $\mathcal{X}'_{\mathcal{O}_{K'}}$ 上への作用は base $\mathcal{O}_{K'}$ にも作用しうるものであることに注意したい)

上の 命題にあらわれた $X'_{/K'}$ と $W_{K'}^{+}$ の $H_c^i(X' \otimes_{K'} \overline{K}, \mathbb{Q}_{l'})$ への 作用に対しては先の semi-stable reduction をもつ場合の議論より, トレースの 交代和の l-independence が導かれる. このことと, 有限群による スキームの商

をとったときのコホモロジーの関係を調べることにより, 任意の $g \in W_K^+$ に対して $\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(g^*; H_c^i((X'/G) \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_{l'}))$ は l' の選び方によらない有理整数になることがわかる.

さて, X と X'' を互いに双有理同値な K 上の 代数多様体とする. U を X と X'' の共通の空でない部分スキームとする. 次のような コンパクト台をもつエタールコホモロジーの 完全列を考えよう:

$$\cdots \longrightarrow H_c^i(\overline{U}, \mathbb{Q}_{l'}) \longrightarrow H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_{l'}) \longrightarrow H_c^i(\overline{X} - \overline{U}, \mathbb{Q}_{l'}) \longrightarrow \cdots,$$
$$\cdots \longrightarrow H_c^i(\overline{U}, \mathbb{Q}_{l'}) \longrightarrow H_c^i(\overline{X}'', \mathbb{Q}_{l'}) \longrightarrow H_c^i(\overline{X}'' - \overline{U}, \mathbb{Q}_{l'}) \longrightarrow \cdots.$$

この完全列によって トレースの交代和 $\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(g^*; H_c^i(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_{l'}))$ と トレースの交代和 $\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(g^*; H_c^i(X'' \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_{l'}))$ との差は より低い次元の多様体 $X - U$, $X'' - U$ の エタールコホモロジー上への作用のトレースの交代和 で書ける. つまり 次が成立する.

補題 . X と X'' が 互いに 双有理同値な K 上の d 次元代数多様体とする. このとき, $d-1$ 次元以下の全ての代数多様体にたいして 定理 A'が正しいと仮定する. このとき, $\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(g^*; H_c^i(X'' \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_{l'}))$ は l'の選び方によらない有理整数になるならば $\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(g^*; H_c^i(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}, \mathbb{Q}_{l'}))$ も l'の選び方によらない有理整数になる.

この 補題を $X'' = X'/G$ として 適用して, $l' \neq p$ 場合に定理 A$'$の証明が帰納法の仮定に帰着される.

$l' = p$ のときも Mokrane [Mo] によって構成された Rapoport-Zink の weight スペクトル系列 の p-進版と crystalline cohomology に対する Lefschetz の 跡公式を用いることで ほぼ同様の方針で 示される. ただ $l' \neq p$ の場合にみたように 証明の途中で 必ずしも完備非特異ではない多様体からくるガロア表現を扱う必要があり, そのような表現に対しては p-進ホッヂ理論が適用できないという テクニカルな 障害が生ずる. このような困難は p-進表現の圏の Grothendieck 群を考えることによって 切り抜けることができるが少しテクニカルな事柄であるため ここでは 詳細は 省くことにする. 詳しくは [O] を参照して頂きたい.

最後に, この場を借りて, 講演の機会を与えて下さった 伊原 康隆 先生に感謝したい. また, この論説を書くにあたって助言をいただいた方々にも感謝したい. 特に 東北大の志甫 淳 さんには文献 [C] について 教えていただいた.

References

[Be] Berthelot, P. *Altérations de variétés algébriques (d'aprés A. J. de Jong)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96. Astérisque **241**, 273–311, 1997.

[C] Chiarellotto, B. *Weights in rigid cohomology —Applications to unipotent F-crystals*, preprint, (1997)

[De] Deligne, P. *La conjecture de Weil II*, Publ. Math. IHES **52** (1980), 137-252

[dJ1] de Jong, A. J., *Smoothness semistability and alterations*, Publ. Math. IHES **83** (1996), 51–93

[dJ2] de Jong, A. J., *Families of curves and alterations*, Ann. de l'institut Fourier **43** (1997), 301–337.

[Fo1] Fontaine, J. M., *Le corps des périodes p-adiques*, Périodes p-adiques, Astérisque **223** (1994), 59-111

[Fo2] Fontaine, J. M., *Représentations l-adiques potentiellement semi-stables*, Périodes p-adiques, Astérisque **223** (1994), 321-348

[KM] Katz, N. and Messing, W. *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Invent. Math. **23** (1974), 73–77.

[Mo] Mokrane, A, *La suite spectrale des poids en cohomologie de Hyodo-Kato*, Duke Math. **72** (1993), 301–337

[O] Ochiai, T, *l-independences of trace of monodromy* , preprint,

[R-Z] Rapoport, M. and Zink, T., *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravararietäten, Monodromiefiltration und Verschwindende Zyklen in ungreicher Charakteristik*, Inv. Math. **68** (1982), 21-201

[Se] Serre, J. P., *Representations linéaires des groupes finis* Paris, Hermann, 1971